



TITLE:

Polynomial Bundleについて (ヒルベルト空間上の作用素)

AUTHOR(S):

安藤, 毅

CITATION:

安藤, 毅. Polynomial Bundleについて (ヒルベルト空間上の作用素). 数理解析研究所講究録 1975, 256: 52-64

ISSUE DATE:

1975-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105763>

RIGHT:

Polynomial Bundle について

北大 応電研 安藤 毅

0. まえがき. 自由度 n の系の振動の方程式は

$$A\ddot{x} + Cx = a$$

で与えられる. ここで $x := x(t)$ および a は n 次元 vector で, A と C は正定値行列である. a は外力を表わす. この一般解を求めるには, 斉次方程式

$$A\ddot{x} + Cx = 0$$

の解が必要となる. これは

$$x(t) := e^{\lambda t} x_0$$

の形の基準振動を求めることに帰せられ, 従って

$$(\lambda^2 A + C)x_0 = 0$$

という正定値行列の固有値問題となり, λ は純虚数となる.

Duffin [1] はこの系に damping (減衰) 項が加わった

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$$

の固有値問題, すなわち

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0$$

の解となる, λ および x の様相を考察した. B が A, C に較ぶれば小さいときは固有値も虚軸に近くあらわれる.

Duffin が注目したのは逆に B が A, C に較ぶる大きく、固有値が全て実数となる場合である。このための充分条件として overdamping 条件が導入された:

$$(Bx, x)^2 > 4(Ax, x) \cdot (Cx, x) \quad \forall x \neq 0.$$

このとき固有値は互に素な二群に分かれ、固有値を決定する Courant - Fisher 型の min-max 公式が確立された。

Krein - Langer [2] は上記の型の固有値問題を Hilbert 空間の中で考察した。ここでは、高階の微分方程式を一階のものに還元する方法で、線形化がなされ、問題を或る indefinite metric に関して self-adjoint な作用素の spectre 理論としてとらえ、Pontjagin - Krein の理論を基礎として

$$AT^2 + BT + C = 0$$

なる (operator) root T の存在、および T の spectre 理論に視点が移った。この quadratic bundle $\lambda^2 A + \lambda B + C$ を一般の polynomial bundle

$$\mathcal{L}(\lambda) := \lambda^n D_n + \lambda^{n-1} D_{n-1} + \dots + \lambda D_1 + D_0.$$

に移し、その spectrum を局在化して対応する operator root を求める研究は Langer [4, 5, 6], Markus - Mereura [7], Markus - Macaev - Russu [8] 等により押し進められた。この講演ではこれ等の成果を概観する。

1. 線形化. Hilbert 空間 \mathcal{H} の有界線形作用素

$$D_0, D_1, \dots, D_{n-1} \quad \text{および} \quad D_n \equiv 1$$

を係数とする多項式

$$\mathcal{L}(\lambda) := \lambda^n + \lambda^{n-1} D_{n-1} + \dots + \lambda D_1 + D_0.$$

を (polynomial) bundle と呼ぶ. bundle \mathcal{L} の

spectrum $\sigma(\mathcal{L})$ とは $\mathcal{L}(\lambda)$ が有界な逆をもたない λ の全体である. bundle \mathcal{L} に \mathcal{H} の n 個の直和

$$\mathcal{H} := \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}$$

(但し \mathcal{H} の元は縦 vector であらねず) 上の線形作用素

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} -D_{n-1} & -D_{n-2} & \dots & -D_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を関連させる. このとき

$$\lambda - \mathbf{L} = \mathbf{B}(\lambda) \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\lambda) & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}(\lambda)$$

となる, ここで

$$\mathbf{B}(\lambda) := \begin{pmatrix} -1 & -B_2(\lambda) & \dots & -B_n(\lambda) \\ 0 & & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\lambda) := \begin{pmatrix} & & -1 \\ 0 & & \lambda \\ -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_k(\lambda) := \sum_{j=k-1}^n \lambda^{j-k+1} D_j \quad (k=2, \dots, n)$$

$B(\lambda)$ および $C(\lambda)$ はどの λ に対しても逆をもつか

$$\sigma(L) = \sigma(L)$$

となり, また

$$L(\lambda)x = 0 \iff (\lambda - L) \begin{pmatrix} \lambda^{n-1}x \\ \lambda^{n-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = 0$$

L の特殊形から $x^{(k)}, x^{(k-1)}, \dots, x^{(0)}$ が $\lambda - L$ の Jordan chain, すなわち

$$(\lambda - L)x^{(j)} = x^{(j-1)} \quad (j=1, \dots, k), \quad (\lambda - L)x^{(0)} = 0$$

のとき, $x^{(k)}, \dots, x^{(0)}$ はそれぞれ n 座標 x_k, \dots, x_0 と決定され, この n 座標が満たすべき条件は

$$L(\lambda)x_l + \frac{1}{1!} \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} x_{(l-1)} + \dots + \frac{1}{l!} \frac{d^l L(\lambda)}{d\lambda^l} x_0 = 0 \quad (l=0, 1, \dots, k)$$

である. この条件は

$$x(t) := \exp(\lambda t) \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} x_j$$

が微分方程式

$$\sum_{j=0}^n D_j x^{(j)} = 0$$

の解となることである.

以上の線形作用素 T が

$$T^n + D_{n-1}T^{n-1} + \dots + D_1T + D_0 = 0$$

をみたすとき bundle L の (operator) root と呼ぶ.

このときは $n-1$ 次の bundle

$$L_T(\lambda) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \lambda^{j-k} D_{n-k+1} T^{n-j}$$

を使って

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}_T(\lambda)(\lambda - T)$$

× 因数分解できる. また \mathcal{H} の部分空間

$$\mathcal{H}_T := \left\{ \begin{pmatrix} T^{n-1}x \\ T^{n-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} ; x \in \mathcal{H} \right\}$$

は L -invariant となる. 逆に L -invariant な部分空間

\mathcal{M} が, Qx で x の n 番目の座標を対応させるとき,

$$\ker(Q|_{\mathcal{M}}) = \{0\}, \quad \text{ran}(Q|_{\mathcal{M}}) = \mathcal{H}$$

をみたせば, root T が一意的に定まり $\mathcal{M} = \mathcal{H}_T$ となる.

σ が $\sigma(\mathcal{L})$ の閉部分集合で, root T が

$$\sigma(T) = \sigma$$

をみたすときは, σ に対応する spectral root と呼ぶ.

σ と共に $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma$ も閉集合のときは, σ に対応する

(L の) spectral projection P_σ が

$$P_\sigma := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} (\lambda - L)^{-1} d\lambda$$

で定められる. $\text{ran}(P_\sigma)$ を σ に対応する spectral subspace と呼ぶ. 明らかに $\sigma(L|_{\text{ran}(P_\sigma)}) = \sigma$.

Proposition 1. (cf. [7]). σ および $\sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma$ は閉集合とする. T が \mathcal{L} の root で $\sigma(T) \subseteq \sigma$ ならば

$$\mathcal{H}_T \subseteq \text{ran}(P_\sigma).$$

もし更に, $\sigma(\mathcal{L}_T) \subseteq \sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma$ が満たされていれば $\mathcal{H}_T = \text{ran}(P_\sigma)$ となる.

3. 単調区間. D_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) は selfadjoint
とする, \mathcal{H} には selfadjoint operator

$$G := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & D_{n-1} \\ 0 & & & \\ 1 & D_{n-1} & & D_1 \end{pmatrix}$$

で indefinite scalar product

$$[x, y] := (Gx, y)$$

が導入され, L は G -selfadjoint とする, かつ

$$[Lx, y] = [x, Ly].$$

\mathcal{H} の部分空間 \mathcal{M} が G -positive とは $[x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{M}$.

のときとする, 更に $\exists \delta > 0$ に対し

$$[x, x] \geq \delta \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{M}$$

のときは uniformly G -positive といい. G -negative

等も同様に定義される.

Theorem 2. (cf. [4]). $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ とする.

$$\mathcal{L}(\lambda_2) \gg 0 \gg \mathcal{L}(\lambda_1)$$

$$\mathcal{L}'(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} \mathcal{L}(\lambda) \gg 0 \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

ならば $\sigma(\mathcal{L}) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$ に対応する spectral root が
存在し, それは selfadjoint 作用素 と相似である.

(略証). $\lambda_1 < \alpha < \lambda_2$ を固定し, $0 \leq t \leq 1$ を para-
meter とし bundle \mathcal{L}_t に対応する L_t を考える:

$$\mathcal{L}_t(\lambda) := \mathcal{L}(\lambda) + (t-1)\mathcal{L}(\alpha).$$

\mathcal{L}_x は \mathcal{L} と同じ仮定をみたす. $\varepsilon > 0$ が充分小的时候

$$\mathcal{L}_x(\lambda \pm i\varepsilon) = \mathcal{L}_x(\lambda) \pm i\varepsilon \mathcal{L}'_x(\lambda) + O(\varepsilon^2) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

で $\mathcal{L}_x(\lambda)$ は self-adjoint, $\mathcal{L}'_x(\lambda) \gg 0$ より $\mathcal{L}_x(\lambda \pm i\varepsilon)$ は逆がある. 従って $\mathcal{S}_x := \sigma(\mathcal{L}_x) \cap [\lambda_1, \lambda_2] \subset \sigma(\mathcal{L}_x) \setminus \mathcal{S}_x$ は共に閉集合になる. \mathcal{S}_x に対応する (\mathcal{L}_x に関係した) spectral projection を P_x とかく. \mathcal{L}_x と共に P_x も G -self-adjoint になり, $x \mapsto P_x$ は norm 連続である.

明らかに $\mathcal{L}_0(\alpha) = 0$ で $\text{ran}(P_0) = \mathcal{H}_\alpha$ となる.

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha^{n-1}x \\ \alpha^{n-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^{n-1}x \\ \alpha^{n-2}x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \right] = (\mathcal{L}'(\alpha)x, x)$$

より \mathcal{H}_α は uniformly G -positive になる. この関係を連続的に接続して $\text{ran}(P_t)$ $0 \leq t \leq 1$ も uniformly positive となる. これから, P_t を表示する operator matrix の第1列を $\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$ とすると, $P_n(t) \gg 0$.

$\sigma(\mathcal{L}_x | \text{ran}(P_t)) \subseteq [\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathcal{L}_x$ の G -self-adjointity

$$\lambda_1^{n-1} P_n(t) \leq P_j(t) \leq \lambda_2^{n-j} P_n(t) \quad (1 \leq j < n, 0 < \lambda_1 < \lambda_2)$$

一方 $\text{ran}(P_n(0)) = \mathcal{H}$ は明らかであるから, 充分 0

に近い t に対しては $\text{ran}(P_n(t)) = \mathcal{H}$ となり, 上より

$$\text{ran}(P_t) = \mathcal{H}_{T_t} \quad \text{但し} \quad T_t := P_{n-1}(t) \cdot P_n(t)^{-1}$$

となり, T_t は spectral root になる. $t \mapsto T_t$ の

対応は analytic であるから, $\mathcal{L}_t(T_t) = 0$ なる

関係は $0 \leq t \leq 1$ 全体で成り立つ. (終)

4. hyperbolicity D_j ($j=0, 1, \dots, n-1$) は self adjoint とする. $\forall 0 \neq x \in \mathcal{H}$ に対して n 次多項式

$$p_x(\lambda) := (\mathcal{L}(\lambda)x, x)$$

が n 個の実根をもつとき, bundle \mathcal{L} は hyperbolic と呼ばれる. このとき $p_x(\lambda)$ の根を並べ

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \dots \geq \lambda_n(x)$$

$$\Lambda_k := \{\lambda_k(x); 0 \neq x \in \mathcal{H}\} \quad k=1, 2, \dots, n$$

とする. Λ_k は bundle \mathcal{L} の k 番目の spectral zone と呼ばれる.

Proposition 3. (cf. [6], [8]). hyperbolic bundle \mathcal{L} の各 spectral zone Λ_k は区間であり, $\Lambda_k \cap \Lambda_{k+1}$ は高々 1 点からなり, $\sigma(\mathcal{L}) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \overline{\Lambda_k}$.

bundle \mathcal{L} が hyperbolic のとき γ_k ($k=1, \dots, n-1$) を

$$\sup \Lambda_{k+1} \leq \gamma_k \leq \inf \Lambda_k$$

により, $n-1$ 次多項式

$$\mathcal{G}(\lambda) := \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \gamma_k)$$

を考えるとき, $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ は G -positive となる, すなわち

$$[\mathcal{G}(\mathcal{L})x, x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

逆に, ある $n-1$ 次多項式

$$\psi(\lambda) := \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda - \rho_k) \quad -\infty < \rho_{n-1} \leq \dots \leq \rho_1 < \infty$$

に対して $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ が G -positive となるならば.

$$(-1)^k (\mathcal{L}(f_k)x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

となり, \mathcal{L} は hyperbolic である.

与えられた bundle が hyperbolic になる充分条件として:

$$D_j \geq 0 \quad (j=0, 1, \dots, n-1)$$

$$(D_j x, x)^2 \geq 4(D_{j-1}x, x)(D_{j+1}x, x) \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \forall j$$

Theorem 4 (cf. [5], [8]). \mathcal{L} は hyperbolic であり, Λ_k をその spectral zone とする. このとき $\overline{\Lambda_k \cap \sigma(\mathcal{L})}$ に対応する spectral root T_k が存在する. \mathcal{H}_{T_k} は k の奇, 偶 にしたがって G -positive, negative となる.

(田谷言正). $G \cdot \mathcal{G}(\mathcal{L})$ に関して \mathcal{H} が pre-Hilbert 空間になり \mathcal{L} がそこで selfadjoint であるから, 実数 $\lambda \neq \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ に対し G -selfadjoint projection E_λ が定まり, 閉区間 Δ が $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ を含まないとき

$$[E(\Delta) \mathcal{L}^j x, x] = \int_{\Delta} \frac{\lambda^j}{g(\lambda)} d\mathcal{G}_x(\lambda) \quad j=0, 1, \dots$$

とかける, ここで $\mathcal{G}_x(\cdot)$ は正測度である. これから

$\Delta \subset \Lambda_k$ のとき k の奇, 偶 に従って $E(\Delta)$ は G -positive, negative となる.

$$\pi_+ := \sum_{\Delta \subset \Lambda_k, k \text{ 奇}} \text{ran}(E(\Delta)) \quad , \quad \pi_- := \sum_{\Delta \subset \Lambda_k, k \text{ 偶}} \text{ran}(E(\Delta))$$

とあるとき, π_+ は G -positive, π_- は G -negative である.

$$[\pi_+, \pi_-] = 0$$

となる. Langer [3] の方法で, π_+, π_- はそれぞれ

L -invariant, maximal G -positive $\pi_{(+)}$ および
maximal G -negative $\pi_{(-)}$ に含まれ

$$\pi_{(\mp)} = \{y \in \mathfrak{g}; [y, \pi_{(\pm)}] = 0\}$$

となる。明らかに次が成り立つ

$$\sigma(L|_{\pi_{(+)}}) \subseteq \bigcup_{\text{奇}} \bar{\Lambda}_k, \quad \sigma(L|_{\pi_{(-)}}) \subseteq \bigcup_{\text{偶}} \bar{\Lambda}_k.$$

$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ は互に素と仮定してもよいから, $L|_{\pi_{(\pm)}}$
のこれらに対応する spectral subspace を π_1, π_2, \dots .

k が奇数のとき, π_k は L -invariant, G -positive で

$$\sigma(L|_{\pi_k}) \subseteq \bar{\Lambda}_k \quad \text{となる maximal なものとして}$$

特徴づけられる。

$\bar{\Lambda}_k \cap \sigma(L)$ に対応する spectral root の存在を示す
には, Qx は x の第 n 座標をあらわすとして, 次が充分:

$$\ker(Q|_{\pi_k}) = \{0\}, \quad \text{ran}(Q|_{\pi_k})^- = \mathfrak{g}.$$

ここで closure でよいという所に上記の maximality がある。

(k を奇数として) $\ker(Q|_{\pi_k}) = \{0\}$ の言証明.

$\exists 0 \neq x \in \pi_k \quad Qx = 0$ とする. π_k の G -positive,

L -invariant より, 正測度 $m(\cdot) \neq 0$ があり

$$[(L-z)^{-1}x, x] = \int_{\bar{\Lambda}_k} \frac{dm(\lambda)}{\lambda-z} \quad z \in \mathbb{C}$$

とかける. $Qx = 0$ と L の特殊形から, $\bar{\Lambda}_k$ の外
で analytic な \mathbb{C} -valued 函数 $f(z)$ と $n-4$ 次
以下の (数値) 多項式 $g(z)$ があり

$$[(L - z)^{-1} x, x] = -(\mathcal{L}(z) h(z), h(z)) + g(z).$$

hyperbolicity より $(\mathcal{L}(\lambda) h(\lambda), h(\lambda))$ は $n-2$ 個の点 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-2}, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ で符号をかける, ここで

$$\gamma_0 := \sup \Lambda_1, \quad \gamma_n := \inf \Lambda_n.$$

したがって

$$(-1)^j \int_{\Lambda_k} \frac{dm(\lambda)}{\lambda - \gamma_j} \leq (-1)^j g(\gamma_j) \quad j=0, \dots, k-2, k+1, \dots, n$$

$n-3$ 回の階差を作り, g の次数 $\leq n-4$ より

$$\int_{\Lambda_k} \frac{dm(\lambda)}{\prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq k-1, k}} (\lambda - \gamma_j)} \leq 0$$

左辺の被積分関数は正值より, これは矛盾する.

(k を奇数として) $\text{ran}(Q|_{\mathcal{M}_k})^\perp = \mathcal{H}$ の証明.

これが成り立なければならない, $x := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で $[x, \mathcal{M}_k] = 0$

のものがある.

$$\mathcal{N}_k := \{y : [y, \mathcal{M}_k] = 0\} \quad \mathcal{G}_k(\lambda) := \frac{g(\lambda)}{(\lambda - \gamma_{k-1})(\lambda - \gamma_k)}$$

とすると, $x \in \mathcal{N}_k$, \mathcal{N}_k は L -invariant で

$$[\mathcal{G}_k(L)y, y] \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{N}_k$$

となる. 上と同じように正測度 $n(\cdot) \neq 0$ があり

$$[\mathcal{G}_k(L)(L - z)^{-1}x, x] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(\lambda)}{\lambda - z}$$

L と x の特殊な形より

$$[\mathcal{G}_k(L)(L - z)^{-1}x, x] = \mathcal{G}_k(z) [(L - z)^{-1}x, x]$$

で, したがって

$$z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn(\lambda)}{\lambda - z} = -z \varphi_k(z) (L^{-1}(z)x, x)$$

となる。 $z = i\eta$, $\eta \uparrow \infty$ とすると, φ_k の次数 $\leq n-3$ より右辺は 0 に近づく, 一方左辺は $\int_{-\infty}^{\infty} dn(\lambda)$ となる。

これは $n(\cdot) \neq 0$ に矛盾する。

$k=1$ のときは $\varphi_1(\lambda) := -\varphi(\lambda)/(\lambda - \sigma_1)$ としてやれる。 また k が偶数のときも同様に出来る。(終)

この定理で言明された, spectral root τ_1, \dots, τ_n から

$$W := \begin{pmatrix} \tau_1^{n-1} & \dots & \tau_n^{n-1} \\ \tau_1^{n-2} & \dots & \tau_n^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

を作ると, root の性質から

$$L \cdot W = W \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 & & 0 \\ & \tau_2 & \\ 0 & & \tau_n \end{pmatrix}$$

となり容易に次の同値性が示される (cf. [6], [7])

- (i) $\mathcal{H}_{\tau_k} \cap \mathcal{H}_{\tau_{k+1}} = \{0\} \quad k=1, 2, \dots, n-1$
- (ii) $\ker(W) = \{0\}$
- (iii) $\ker(W^*) = \{0\}$.

文 献

- [1] Duffin, R.J., A minimax theory for overdamped networks, J. Rat. Mech. Anal. 4 (1955), 221-233.
- [2] Krein, M.G. and Langer, H., Certain mathematical principles of the linear theory of damped vibrations of continua, Proc. of International Conf. : Applications of the theory of functions in continuum mechanics, vol. II 1965, 283-322, Moskow.
- [3] Langer, H., Invariante Teilraume definisierbarer J-selbst-adjungierte Operatoren, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 475 (1971), 1-23.
- [4] Langer, H., Über eine Klasse nichtlinearer Eigenwertprobleme, Acta Sci. Math. 35(1973), 73-86.
- [5] Langer, H., Über eine Klasse polynomialer Scharen selbst-adjungierter Operatoren im Hilbertraum, J. Functional Anal. 12(1973), 13-29.
- [6] Langer, H., II, J. Functional Anal. 16(1974), 221-234.
- [7] Markus, A.S. and Mereuca, I.V., On the complete n-tuple of roots of the operator equation corresponding to a polynomial operator bundle, Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 1108-1131.
- [8] Markus, A.S., Macaev, V.I. and Russu, G.I., Some generalization of theory of strongly damped bundles to the case of general order, Acta Sci. Math. 34 (1973), 245-271.